

Problème 503 – APT dans la tête

Niveaux : Première (Spécialité Maths)

Chapitres : Suites numériques, Algorithmique (Python), Polynômes du second degré

Inédit, publié le 23/12/2024



Si on ne devait retenir qu'une seule chanson avec un refrain entêtant en 2024, « APT » serait certainement la grande gagnante. Fruit de la collaboration entre la star Bruno Mars et la chanteuse Rosé du groupe non-moins célèbre Blackpink, « APT » a pulvérisé les records d'écoute dans la fin d'année 2024. Le mot « APT », répété exactement 61 fois dans la chanson, est difficile à retirer de la tête une fois qu'il est entré ! Combien de fois finira-t-on par l'entendre ? C'est tout l'objet de ce problème !

Maylis est une lycéenne fan de K-pop qui est tout de suite tombée amoureuse de la chanson le jour où elle l'a entendue à la radio la première fois. On suppose que, ce jour-là, en tombant à peu près au milieu de la chanson en diffusion, elle a entendu le mot « APT » 20 fois. A partir de ce moment-là, la chanson a dès le lendemain rejoint la playlist de Maylis afin qu'elle la réécoute, toujours en entier, trois fois chaque jour. On appelle (u_n) la suite qui, à la fin du n -ième jour qui suit le jour où Maylis a entendu la chanson la première fois (qu'on appellera le jour « zéro »), associe le nombre total cumulé de fois où Maylis a entendu le mot « APT » uniquement à travers ses écoutes sur sa playlist, en plus de ce qu'elle a entendu le jour « zéro ». On pose donc $u_0 = 20$.

1) a) Calculer u_1 et u_2 .

b) Donner la nature de la suite (u_n) et en déduire une expression de u_n en fonction de n .

2) Écrire un programme Python qui permet de déterminer au bout de combien de jours après le jour « zéro » Maylis aura entendu le mot « APT » plus de 2 000 fois. Donner ce nombre de jours.

3) 10 jours après le jour « zéro », Maylis fait découvrir la chanson à son ami Dylan, qui l'écoute une fois en entier. Dès le lendemain, Dylan, se met lui aussi à écouter la chanson en boucle, et même cinq fois par jour. On appelle alors (v_n) la suite qui à n (qui est toujours le nombre de jours après le jour « zéro »), associe le nombre total de fois où Dylan a entendu le mot « APT ».

- a) Quel est le premier terme de la suite (v_n) ? Donner son rang et sa valeur.
b) Exprimer v_n en fonction de n .

4) Au bout de combien de jours n_0 après le jour « zéro » Dylan aura-t-il entendu le mot « APT » plus souvent que Maylis ? Justifier la réponse.

5) Les deux amis arrêteront-ils un jour d'écouter cette chanson à ce rythme effréné ? Maylis, qui adore autant les mathématiques que la K-Pop, propose à Dylan d'arrêter d'écouter ce morceau le jour où Blackpink reviendra : elle pense que ce sera exactement « le jour où il existera un entier n_1 tel que $u_{n_1} + v_{n_1} < n_1^2$ »

Résoudre l'inéquation proposée par Maylis pour trouver au bout de combien de jours n_1 après le jour « zéro » Blackpink reviendra^(*).

() Aux fans impatients de Blackpink : le jour « zéro » n'étant indiqué nulle part, il est inutile de chercher dans ce problème le jour réel où Blackpink reviendra...*